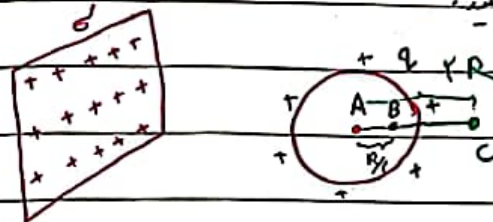


۱. بار الکتریکی با چگالی سطحی σ به طور یکنواخت در سطح بی نهایت نازک قرار دارد. در مقابل آن چوتهی نازک نازک به شعاع R قرار داده شده است (مطابق شکل). بار الکتریکی Q به طور یکنواخت در سطح چوتهی نازک توزیع شده است.

الف) اختلاف پتانسیل الکتریکی بین نقاط A در مرکز نقطه B در شعاع $R/2$ را حساب کنید.



می دانیم داخل کره در شانا میدان صفر است

می دانیم میدان صفر نیست برایت نازک

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

$$V_B - V_A = - \int_0^{R/2} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + E_{in} \right) \cdot dL$$

$$V_B - V_A = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \frac{R}{2} = - \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \quad \checkmark$$

ب) اختلاف پتانسیل بین نقطه A و نقطه C را حساب کنید.

$$V_A - V_C = - \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \int_A^R \vec{E} \cdot d\vec{L} - \int_R^{2R} \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

$$V_A - V_C = - \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dr - \int_0^R E_{in} dr - \int_R^{2R} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + E_{ex} \right) dr$$

$$V_A - V_C = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R - \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (2R - R) \right) - \int_R^{2R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V_A - V_C = - \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^{2R}$$

$$V_A - V_C = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \right)$$

$$V_A - V_C = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} \quad \checkmark$$

ج) بار لازم برای جابجایی آنتروپ از نقطه A به B را حساب کنید.

$$W_{ext} = U_B - U_A = -eV_B - (-eV_A)$$

$$= -e[V_B - V_A] = -e\left[\frac{\sigma R}{\epsilon_0}\right]$$

از قسمت الف داریم.

۲) یک سیم پلاستیک با رادیوس طول $l = 10 \text{ cm}$ و ولای چگالی بار دارد.

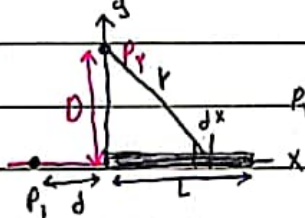
پتانسیل آن $\lambda = cx$ است که در آن $c = 4919 \text{ pC/m}$.

الف) به ازای $y = 0$ در یک نقطه بیابان آنتروپ را در نقطه P_1 در محور x واقع در

$$y = 0 = 31.54 \text{ cm}$$

ب) مولفه E_x میدان آنتروپ را در P_1 بیابید.

ب) چراغ مغزی E_x میدان در P_1 با استفاده از تغییر الف) بیابید.



الف) به عنوان از میدان آنتروپ یک خط dx و فاصله r از P_1

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \Rightarrow dq = \lambda dx = (cx) dx$$

$$dV = \frac{k dq}{r} \Rightarrow V = \int \frac{k dq}{r} = \int \frac{k (cx) dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = kc \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= kc \left[\sqrt{x^2 + y^2} \right]_0^L = kc \left[\sqrt{L^2 + y^2} - y \right]$$

$$V = (9 \times 10^9) (4919 \times 10^{-12}) \left[\sqrt{(10)^2 + (31.54)^2} - 31.54 \right] = 0.3561 \text{ V}$$

$$E = E_x + E_y = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[kc \left(\sqrt{L^2 + y^2} - y \right) \right]$$

$$E_y = -kc \left[\frac{y}{\sqrt{L^2 + y^2}} - 1 \right] = -kc \left[\frac{y}{\sqrt{L^2 + y^2}} - 1 \right]$$

$$E_y = - (9 \times 10^9) (4919 \times 10^{-12}) \left[\frac{31.54}{\sqrt{(10)^2 + (31.54)^2}} - 1 \right] = \dots$$

ج) اگر جهت برد $V = kc \left[\sqrt{L^2 + y^2} - y \right]$ را در نظر بگیریم از آن مشتق بگیریم E_x را

حساب کنیم.

الف) خازن مسطح با سطح A و فاصله بین صفحات d به باطری با اختلاف پتانسیل V_0 مطابق شکل وصل می شود. اگر فاصله بین صفحات d را نصف کنیم بین صفحات را بزنند، نسبت بار در حالتی که فاصله بین صفحات را چهار برده ایم به بار خازن بدون بار می دهی آنقدر است؟



حالت بدون بار در آن ترتیب

بار ذخیره شده در خازن در حالت بدون بار $Q =$
در آن ترتیب

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow Q = \frac{\epsilon_0 A V_0}{d}$$

حالت با بار در آن ترتیب

خازن ها به صورت موازی قرار گرفته اند.

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{2d} \quad \text{خازن اول} \quad / \quad \text{خازن دوم} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 KA}{2d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 KA}{2d} + \frac{\epsilon_0 A}{2d} = \frac{\epsilon_0 A}{2d} (K+1)$$

$$C V_0 = Q \Rightarrow Q = \frac{\epsilon_0 A V_0}{2d} (K+1)$$

$$\frac{Q \text{ با بار در آن ترتیب}}{Q \text{ بدون بار در آن ترتیب}} = \frac{\frac{(K+1) \epsilon_0 A V_0}{2d}}{\frac{\epsilon_0 A V_0}{d}} = \frac{K+1}{2}$$

جیسا کہ حالہ کے طریقے کے قطع لیں۔ دیکھیں۔ فارمولا کے اندر کے اخراج لیں، اختلاف
 یہ ہیں دوسرے خانے کے اخراجات ہیں۔
 دوسرے خانے کے اخراجات ہیں۔

$$Q = V_0 C, \quad C = (k+1) \frac{\epsilon_0 A}{2d}$$

$$Q = \frac{\epsilon_0 A V_0}{2d} (k+1)$$

یہ اخراج اس کے اندر ہے، طرزیہ باز میں لہذا، حالت بدلتی ہے اس کے اندر

$$\frac{\epsilon_0 A}{d} = C, \quad Q = CV_0$$

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{\frac{\epsilon_0 A V_0}{2d} (k+1)}{\frac{\epsilon_0 A}{d}} = \frac{V_0}{2} (k+1)$$

تمرین: در شکل زیر، ظرف استوانه‌ای دارای شعاع‌های a و b می‌باشد. نشان دهید نصف انرژی الکتریکی ذخیره شده در استوانه‌ای به شعاع $r = \sqrt{ab}$ مکرر دارد.



$$\oint E \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL} \quad V = -\int E dr = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL} dr$$

$$\int \frac{dr}{r} = \ln r$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} (\ln b - \ln a) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

3

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$U = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}} \times \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a} \right)^2 = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

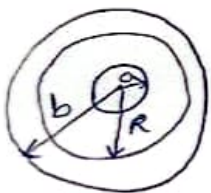
$$U' = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r}{a} \quad U' = \frac{1}{2} U$$

$$\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r}{a} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \ln \frac{r}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$$

$$\ln \frac{r}{a} = \ln \sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{r}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow r = \sqrt{ab}$$

تمرین: مطابق شکل زیر یک خازن کروی با رادیوس به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی $b = 3a$ ، صحنه داخلی با بار $+q$ و صحنه خارجی با بار $-q$ را در نظر بگیرید. معضای سین دو کره از شعاع a تا R ، با باره ای بی الکتریکی با ضریب k پر شده است و صحنه معضای خازن خالی است.

$$a < R < b$$



الف) اختلاف پتانسیل بین دو صحنه خازن را به دست آورید.

ب) ظرفیت خازن را به دست آورید.

ج) شعاع R را چنان به دست آورید (به دست a) تا یک چهارم انرژی کل خازن در ناحیه با ضریب بی الکتریکی k قرار گیرد. (در کلمه مستقیم های مسئله $k = 3$ را در نظر بگیرید).

$$\oint E \cdot dA = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow E \cdot \sum n r^2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow E = \frac{q}{\sum n \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad (\text{نک})$$

$$V = - \int E \cdot dr \Rightarrow \Delta V = - \int_a^R \frac{q}{\sum n \epsilon_0 k r^2} dr - \int_R^{ra} \frac{q}{\sum n \epsilon_0 r^2} dr$$

$$\Rightarrow \Delta V = - \frac{q}{\sum n \epsilon_0} \left(\frac{1}{k} \int_a^R \frac{dr}{r^2} + \int_R^{ra} \frac{dr}{r^2} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{q}{\sum n \epsilon_0} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{ra} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{q}{\sum n \epsilon_0} \left(\frac{1}{k} \left(\frac{R-a}{aR} \right) + \frac{ra-R}{raR} \right)$$

$$\cdot k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R-a + \frac{1}{\gamma}a - R}{\frac{1}{\gamma}aR} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

(ب)

$$u = \frac{q^2}{2C} \quad u_{\text{ج}} = \frac{q^2}{2C_{\text{ج}}} \quad u_1 = \frac{q^2}{2C_1}$$

(ج) دو حادس کروی سری

$$u_1 = \frac{1}{2} u_{\text{ج}} \quad u_{\text{ج}} = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Delta V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \frac{R}{\gamma}} \frac{R-a}{aR} = \frac{q(R-a)}{12\pi\epsilon_0 aR} \Rightarrow C_1 = \frac{q}{\Delta V_1} = \frac{12\pi\epsilon_0 aR}{R-a}$$

$$u_1 = \frac{q^2}{2 \cdot \frac{12\pi\epsilon_0 aR}{R-a}} = \frac{q^2(R-a)}{24\pi\epsilon_0 aR} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 R}$$

$$\gamma(R-a) = a \Rightarrow \gamma R - \gamma a = a \Rightarrow \gamma R = \frac{1}{\gamma}a \Rightarrow R = \frac{1}{\gamma^2} a$$